第 43 卷 第 2 期
2023 年 4 月

桂林电子科技大学学报
Journal of Guilin University of Electronic Technology

Vol. 43, No. 2
Apr. 2023

一种改进雅可比算法的频域临界采样图滤波器组

李威京，蒋俊正

（桂林电子科技大学 信息与通信学院，广西 桂林 541004）

摘 要：频域临界采样图滤波器组需要对拉普拉斯矩阵进行特征分解，这导致了该框架计算复杂度过高。针对该问题，采用改进雅可比算法近似求解该框架的特征矩阵，从而降低计算复杂度。改进的雅可比算法将近似求解特征矩阵的问题归结为一个带约束的优化问题，将拉普拉斯矩阵的近似误差作为目标函数，以近似特征矩阵的稀疏正交性作为约束条件，从而求解出近似特征矩阵。理论和仿真实验结果表明，近似特征矩阵用于频域临界采样图滤波器组不会改变其完全重构条件，且与现有的频域临界采样图滤波组相比，改进的雅可比算法在降低计算复杂度的同时保持了良好的去噪性能。

关键词：图滤波器组；频域采样；图傅里叶变换；改进雅可比算法

中图分类号：TP301.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-808X(2023)02-0108-08

A critically sampled graph filter banks with spectral domain sampling based on improved Jacobi algorithm

LI Weijing, JIANG Junzheng

(School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Critically sampled graph filter banks with spectral domain sampling requires to perform eigendecomposition of the Laplacian matrix, which leads to high computational complexity. To solve this problem, an improved Jacobi algorithm is proposed to approximate the eigenmatrix of the framework to reduce the computational complexity. In this algorithm, the approximate solution of eigenmatrix is formulated into a constrained optimization problem, whose objective function is the approximation error of Laplacian matrix, and the constraint function is the sparse orthogonality of the approximate eigenmatrix. Theoretical and simulation experiments show that using the approximate feature matrix in the filter banks will not destroy its perfect reconstruction conditions. Compared with the existing critically sampled graph filter banks with spectral domain sampling, the improved algorithm reduces the computational complexity while maintaining good denoise performance.

Key words: graph filter bank; spectral sampling; graph fourier transform; improved Jacobi algorithm

社交网络、传感器网络及脑神经网络等[1-3]高维不规则数据可建模为图信号。与定义在规则的时间域与空间域的传统离散信号不同，图信号通常定义在不规则的非欧几里得域。传统的信号处理方法不适用于图信号，如何处理这类高维不规则数据已成为一个亟待解决的问题。为此，研究人员提出了图信号处理框架[4]，该框架将传统信号处理方法与图论相结合，为处理这类高维不规则数据提供了强有力的工具。其中，由传统滤波器组延伸而来的图滤波器组[5-7]因其稀疏特性和多分辨分析能力而受到了广大研究人员的青睐。

目前，图滤波器组的设计方法主要有顶点域采样图滤波器组和频域采样图滤波器组。文献[8]提出了完全重构的两通道顶点域临界采样图滤波器组，该滤波器组满足正交特性，但不满足紧支撑性。文献[9]提出了双正交图小波滤波器组，该滤波组既满足完全重构特性，又满足紧支撑性。但上述 2 种顶点域采样滤波器组本质上仅适用于二分图，对于非二分图则需要进行近似处理。文献[10]提出的样条图小波滤波器组满足完全重构特性与图不变性，其对所有拓扑结

收稿日期：2021-09-13

基金项目：国家自然科学基金(62171146, 61761011)；广西创新驱动发展专项(桂科 AA21077008)

通信作者：蒋俊正(1983－)，男，教授，博士，研究方向为图信号处理理论与算法、分布式信号处理理论与算法。E-mail:jzjiang@guet.edu.cn

引文格式：李威京，蒋俊正.一种改进雅可比算法的频域临界采样图滤波器组[J].桂林电子科技大学学报，2023，43(2)：108-115.

构的图信号都适用。然而，这几类顶点域采样图滤波器组还存在如下局限性：1）需要选择合适的采样集，才能确保其完全重构；2）其完全重构的采样集不唯一，不同的采样集会影响图滤波器组的整体性能。文献[11]提出了两通道频域临界采样图滤波器组，该频域采样图滤波器组克服了顶点域采样图滤波器的缺点，其完全重构的采样集是唯一的，且对于任意拓扑结构的图信号都满足完全重构特性；但由于其采样操作在频域上进行，需要借助特征分解来获取图模型的特征向量矩阵，这导致了计算复杂度过高。

针对频域临界采样图滤波器组存在的问题，可采用改进的雅可比算法（截断雅可比算法和并行截断雅可比算法）来近似求解拉普拉斯矩阵的特征矩阵。改进的雅可比算法是一种贪婪算法，其每步迭代所求得的稀疏正交矩阵都属于 Givens 旋转矩阵，将每步迭代求得的 Givens 旋转矩阵相乘，可得到近似特征矩阵，从而近似求得图信号的频域表示。改进雅可比算法在满足完全重构的条件下降低了频域临界采样图滤波器组的计算复杂度。

1　基础知识

1.1　图信号处理的基础知识

无向图 $G=(V,E)$ 是由顶点集 $V=\{0,1,\cdots,N-1\}$ 与边集 E 组成，其中节点数 $N=|V|$ 表示图的大小。图 G 可用权重矩阵 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{N\times N}$ 表示，权重矩阵的元素 w_{ij} 表示顶点 i 与顶点 j 之间的关联程度，若 $w_{ij}=0$，则表示顶点 i 与顶点 j 之间没有边相连。根据权重矩阵 $\boldsymbol{W}$，可定义度矩阵 $\boldsymbol{D}$、拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$，度矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵，其对角线元素等于权重矩阵的行和，即 $d_{ii}=\sum_{j=1}^{n}w_{ij}$，而拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 定义为度矩阵与权重矩阵之差，即 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W}$。对拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 进行特征分解，有

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},\tag{1}$$

其中，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbf{R}^{N\times N}$ 的对角元素由 $\boldsymbol{L}$ 的特征值组成，其对角元素按从小到大的顺序排列，即 $0=\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{N-1}$，特征矩阵 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{N-1}]$ 的列向量对应于 $\boldsymbol{L}$ 的特征向量。

图信号可表示为 N 维向量 $\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^N$，即 $\boldsymbol{f}=[f_0,f_1,\cdots,f_{N-1}]^{\mathrm{T}}$，其中第 i 个元素对应于图上第 i 个节点的信号值。与传统离散信号类似，图信号也有对应的频域表示，图信号 $\boldsymbol{f}$ 的图傅里叶变换定义为

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f},\tag{2}$$

逆图傅里叶变换定义为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{f}},\tag{3}$$

式(2)、(3)称为图傅里叶变换对。

图滤波可从顶点域和频域 2 个角度考虑。在顶点域，图滤波可表示为拉普拉斯矩阵的多项式，图信号的图滤波过程可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}=\Big(\sum_{p=0}^{P}c_p\boldsymbol{L}^p\Big)\boldsymbol{f},\tag{4}$$

图信号在经过图滤波后，每个顶点的信号值都是其 p-hop 邻域的信号值的线性组合。在频域，图信号的图滤波过程可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{U}H(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{U}H(\boldsymbol{\Lambda})\widetilde{\boldsymbol{f}},\tag{5}$$

其中，

$$H(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(H(\lambda_0),H(\lambda_1),\cdots,H(\lambda_{N-1}))$$

为图滤波器的频率响应，$H(\lambda_i)$ 为图频率的多项式。

2.2　两通道频域临界采样图滤波器组的结构

图 1 为两通道频域临界采样图滤波器组的基本结构[11]，其中：

$$H_k(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(H_k(\lambda_0),H_k(\lambda_1),\cdots,H_k(\lambda_{N-1}))$$

为分析滤波器组中第 k 个滤波器的频率响应；

$$G_k(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(G_k(\lambda_0),G_k(\lambda_1),\cdots,G_k(\lambda_{N-1}))$$

为综合滤波器组中第 k 个滤波器的频率响应；$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d,0}=[\boldsymbol{I}_{N/2},\boldsymbol{J}_{N/2}]$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d,1}=[\boldsymbol{I}_{N/2},\boldsymbol{J}_{N/2}]$ 为频域上采样矩阵；$\boldsymbol{I}_{N/2}$、$\boldsymbol{J}_{N/2}$ 分别为单位矩阵、反向单位矩阵；$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{u,0}=\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d,0}^{\mathrm{T}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{S}}_{u,1}=\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d,1}^{\mathrm{T}}$[12] 为频域下采样矩阵；$\boldsymbol{f}$ 为输入信号；$\hat{\boldsymbol{f}}$ 为输出信号。

两通道频域临界采样图滤波器组的输入输出关系为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{f},\\ \boldsymbol{T}=\boldsymbol{U}_0G_0(\boldsymbol{\Lambda})\widetilde{\boldsymbol{S}}_{u,0}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d,0}H_0(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}+\\ \quad\boldsymbol{U}_0G_1(\boldsymbol{\Lambda})\widetilde{\boldsymbol{S}}_{u,1}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d,1}H_1(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}。\end{cases}\tag{6}$$

根据输入输出关系，当子带滤波器的频率响应满足

$$\begin{cases}G_1(\lambda_i)H_0(\lambda_i)+G_1(\lambda_i)H_1(\lambda_i)=c^2,\\ G_0(\lambda_i)H_0(\lambda_{N-i-1})+G_1(\lambda_i)H_1(\lambda_{N-i-1})=0,\\ \quad i=0,1,\cdots,N-1。\end{cases}\tag{7}$$

传递函数 $\boldsymbol{T}=c^2\boldsymbol{I}$，此时该滤波器组满足完全重构条件[11]。

关于 $G_0(\lambda_i)$、$H_0(\lambda_i)$ 的设计，现有的设计方法主要有正交[8] 和双正交[9] 2 种类型。两通道频域采样图滤波器组的正交设计取决于 $H_0(\lambda_i)$，而 $H_0(\lambda_i)$

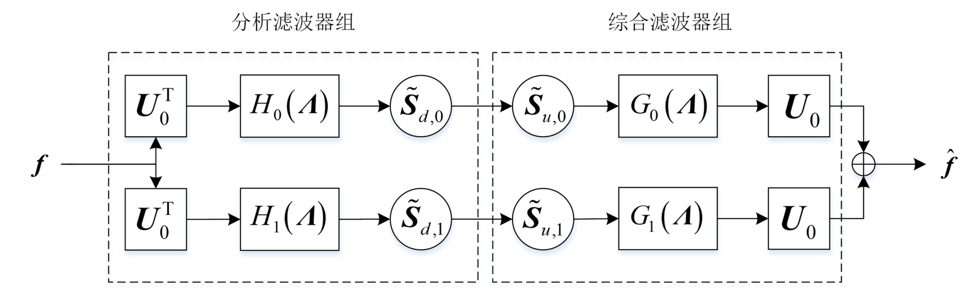


图 1 两通道频域临界采样图滤波器组

的设计借鉴了经典信号处理中的设计方法[8]，即

$$H_0(\lambda_i)=H^{\text{freq}}\left(\frac{\pi i}{N}\right), \tag{8}$$

其余滤波器 $H_1(\lambda_i)$、$G_0(\lambda_i)$、$G_1(\lambda_i)$都可由 $H_0(\lambda_i)$求得，

$$H_1(\lambda_i)=H_0(\lambda_{N-i-1}),$$
$$G_0(\lambda_i)=H_0(\lambda_i),$$
$$G_1(\lambda_i)=H_1(\lambda_i)。$$

与此同时，为了确保图滤波器组的完全重构特性，$H_0(\lambda_i)$需满足：

$$H_0^2(\lambda_i)+H_0^2(\lambda_{N-i-1})=c^2。 \tag{9}$$

对于双正交频域采样图滤波器组而言，其高通滤波器则由低通滤波器定义[9]，即

$$H_1(\lambda_i)=G_0(\lambda_{N-i-1}),G_1(\lambda_i)=H_0(\lambda_{N-i-1}), \tag{10}$$

$G_0(\lambda_i)$、$H_0(\lambda_i)$可通过频谱分解获得。该设计方法类似于经典信号处理中的双正交小波变换[13]。在上述条件的约束下，双正交频域采样图滤波器组的完全重构条件[9]为

$$G_0(\lambda_i)H_0(\lambda_i)+H_0(\lambda_{N-i-1})G_0(\lambda_{N-i-1})=c^2。 \tag{11}$$

2 频域临界采样图滤波器组的快速实现方法

频域临界采样图滤波器组需要计算图信号的图傅里叶变换，因此需对拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 进行特征分解，求得其特征矩阵 $\boldsymbol{U}$，该操作的计算复杂度为 $O(n^3)$。当图的规模较小时，可快速求得其特征矩阵，但当图的规模较大时，计算特征矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的代价会变得较大。为降低求解特征矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的计算复杂度，可采用改进的雅可比算法来近似求解特征矩阵 $\boldsymbol{U}$[14]。

2.1 近似求解特征矩阵的问题归结

近似求解特征矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的目的是找到一个近似的特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$，使得以下最优化问题取得最小值：

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\Lambda}},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_J}\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_J\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{S}_J^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{J-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\|_{\mathrm{F}}^2,$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{S}_j\in S,\ \hat{\boldsymbol{\Lambda}}\in D, \tag{12}$$

其中：$\boldsymbol{S}_j\in\mathbf{R}^{N\times N}$，$j=1,2,\cdots,J$ 为稀疏的正交矩阵；$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ 为对角矩阵；D 为对角矩阵集；S 为稀疏正交矩阵集。

为了衡量近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 与特征矩阵 $\boldsymbol{U}$ 间的计算复杂度，给出相对复杂度（relative complexity gain，简称 RCG）的定义[14]。相对复杂度是特征矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的非零元素个数与近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 中的稀疏正交因子 $\boldsymbol{S}_j$ 的非零元素个数之和的比率，即

$$\text{RCG}=\frac{\|\boldsymbol{U}\|_0}{\sum_{j=1}^{J}\|\boldsymbol{S}_j\|_0}, \tag{13}$$

其中 $\|\boldsymbol{U}\|_0$ 为矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的 0 范数。

2.2 截断雅可比算法

截断雅可比算法是雅可比算法[15]的改进，雅可比算法在近似对角矩阵 $\boldsymbol{L}_j$ 达到某个精度后停止迭代，而截断雅可比算法则预先设置了迭代次数。对于式(12)的最优化问题，若将稀疏正交矩阵 $\boldsymbol{S}_j$ 约束在 Givens 旋转矩阵集 R_G 中，并预先设定稀疏正交矩阵 $\boldsymbol{S}_j$ 的个数 J，即可得到截断雅可比算法[14]。n 维向量的 Givens 旋转固定其中 $n-2$ 个坐标，其余 2 个坐标则旋转一定的角度，n 维 Givens 旋转矩阵可表示为

$$\boldsymbol{G}_{p,q,\theta}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&c&&&&-s&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&s&&&&c&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中：p、q 为旋转坐标；$\theta\in[0,2\pi]$ 为旋转角；$c=\cos\theta$；$s=\sin\theta$[16]。显然，Givens 旋转矩阵由 p、q、θ

三个参数所决定。截断雅可比算法是一种贪婪算法，其每步迭代都旨在寻找一个 Givens 旋转矩阵，使得代价函数下降最快[14]，即

$$\boldsymbol{S}_j \leftarrow \min_{S\in R_G} \| \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{S} \|^2_{\mathrm{offdiag}}, \tag{15}$$

其中，$\|\boldsymbol{A}\|^2_{\mathrm{offdiag}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角线元素的平方和。

式(15)的解属于 Givens 旋转矩阵，其旋转坐标 p、q 对应于矩阵 $\boldsymbol{L}_j$ 绝对值最大的元素 $|l^j_{pq}|$ 所在的行和列，旋转角

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{l^j_{qq}-l^j_{pp}}{2l^j_{pq}}\right)+(2k+1)\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}$$[17]。

截断雅可比算法如下：

输入：拉普拉斯矩阵，Givens 旋转次数。

输出：近似特征矩阵，近似特征值。

初始化：$\boldsymbol{L}_j=\boldsymbol{L}$，　$j=1$ 。

1) 找出拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}_j$ 中绝对值最大的元素 l^j_{pq}；

2) 确定元素 l^j_{pq} 所在的行坐标 p 和列坐标 q，并取出元素 l^j_{pp}、l^j_{qq}；

3) 计算 Givens 旋转角，

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{l^j_{qq}-l^j_{pp}}{2l^j_{pq}}\right),$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{l^j_{qq}-l^j_{pp}}{2l^j_{pq}}\right)+\frac{\pi}{4};$$

4) 计算

$$\mathrm{err_}\theta_i = \left(l^k_{pq}\cos(2\theta_i)+\frac{1}{2}(l^j_{qq}-l^j_{pp})\sin(2\theta_i)\right),$$

$$i\in\{1,2\};$$

5) 若 $\mathrm{err_}\theta_1 < \mathrm{err_}\theta_2$，则旋转角 $\theta=\theta_1$；若 $\mathrm{err_}\theta_1 > \mathrm{err_}\theta_2$，则旋转角 $\theta=\theta_2$；

6) 计算 $c=\cos\theta$，$s=\sin\theta$ 及 Givens 旋转矩阵 $\boldsymbol{S}_j=\boldsymbol{G}_{p,q,\theta}$；

7) 计算 Givens 旋转后的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}_{j+1}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}_j\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{S}_j$，若 $j<J$，则返回步骤 1)，继续迭代；若 $j=J$，则终止迭代，且输出近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_J$，近似特征值 $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}=\mathrm{diag}\boldsymbol{L}_{j+1}$。

2.3　并行截断雅可比算法

式(13)给出的相对复杂度增益只是理论上的度量指标，在实际运算过程中，使用近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 运算的时间开销与其相对复杂度增益并不完全成比例。这是因为，在编程环境中(如 MATLAB)，近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_J$ 与向量相乘是一个串行过程，而特征矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与向量相乘则是一个并行过程[14]。因此，即使相对复杂度增益较大，使用近似 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 运算的时间也可能相对较长。

由截断雅可比算法改进而来的并行截断雅可比算法[14]较好地解决了上述问题。在每步迭代过程中，截断雅可比算法只做了 1 次 Givens 旋转，而并行截断雅可比算法则可做 $n/2$ 次 Givens 旋转。因此，对于需要进行 J 次 Givens 旋转的近似过程，并行截断雅可比算法只需选择 $K=2J/n$ 个旋转因子，其中每个旋转因子 $\boldsymbol{S}_k$ 都是由 $n/2$ 个不相交 Givens 旋转所组成的矩阵，其数学表达式可表示为

$$\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{R}_{N/2}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}, i\in\{1,2,\cdots,n/2\}。$$

与截断雅可比算法类似，并行截断雅可比算法也是通过寻找矩阵 $\boldsymbol{L}_k$ 中绝对值最大的元素来确定 Givens 旋转，不同的是，所选出的 $n/2$ 个元素必须保证两两之间不处在同一行或同一列。在每步迭代过程中，虽然并行截断雅可比算法得到的解不是最优解，但其实际运行时间要远低于截断雅可比算法[14]。并行截断雅可比算法如下：

输入：拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$，Gives 旋转次数 J，每次迭代的 Givens 旋转次数 $t=n/2$。

输出：近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$，近似特征值 $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$。

初始化：$\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{L}$，$k=1$。

1) 取拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}_k$ 的上三角元素，并按从大到小的顺序进行排列；

2) 取前 $n/2$ 个最大值元素，且保证两元素不在同一行或同一列；

3) 根据取出的 $n/2$ 个元素，计算其对应的 Givens 旋转角，

$$\theta_i = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{l^k_{qq}-l^k_{pp}}{2l^k_{pq}}\right)+\frac{\pi}{4};$$

4) 计算 $c_i=\cos\theta_i$，$s_i=\sin\theta_i$，并将其填入矩阵 $\boldsymbol{S}_k$ 相应的位置；

5) 若 $\mathrm{err_}q_1<\mathrm{err_}q_2$，则旋转角 $\theta=\theta_1$；若 $\mathrm{err_}q_1<\mathrm{err_}q_2$，则旋转角 $\theta=\theta_2$；

6) 计算 $c=\cos\theta$，$s=\sin\theta$ 及 Givens 旋转矩阵 $\boldsymbol{S}_j=\boldsymbol{G}_{p,q,\theta}$；

7) 计算 Givens 旋转后的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}_{j+1}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}_j\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{S}_j$，若 $j<J$，则返回步骤 1)，继续迭代；若 $j=J$，则终止迭代，且输出近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\cdots\boldsymbol{S}_J$，近似特征值 $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}=\mathrm{diag}\boldsymbol{L}_{j+1}$。

2.4 计算复杂度分析

2.4.1 截断雅可比算法

寻找矩阵 $\boldsymbol{L}_j$ 中绝对值最大的元素是截断雅可比算法中计算复杂度最高的操作，其计算复杂度为 $O(\|\boldsymbol{L}_j\|_0)$，最坏情况下，该操作的计算复杂度为 $O(n^2)$。Givens 旋转前后的矩阵 $\boldsymbol{L}_j$ 与 $\boldsymbol{L}_{j+1}$ 仅有 p、q 两行与 p、q 两列的元素不相同，其余位置的元素都相同。若当前迭代步骤中所选 Givens 旋转坐标 p、q 与前次选择的不同，计算复杂度就能降到 $O(n)$。实际计算过程中，绝大多数情况是 2 次选择的坐标不相同，因此截断雅可比算法的平均计算复杂度为 $O(n^2+nJ)$。求得近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 后，该矩阵与向量或矩阵相乘的计算复杂度为 $O(J)$。

2.4.2 并行截断雅可比算法

对矩阵 $\boldsymbol{L}_k$ 元素进行排序是并行截断雅可比算法中计算复杂度最高的操作。在每步迭代中，最多需要对 $n(n-1)/2$ 个元素进行排序，该操作的计算复杂度为 $O(n^2\log n)$。由于并行截断雅可比算法只需迭代 $K=O(J/n)$ 次，因此整体计算复杂度为 $O(nJ\log n)$。在求得近似特征矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 后，运用该矩阵与向量或矩阵相乘的计算复杂度为 $O(J)$。并行截断雅可比算法中每个旋转因子 $\boldsymbol{S}_k$ 包含了 $n/2$ 个 Givens 旋转，是一个并行计算过程。

为了使上述 2 种近似对角化算法的计算复杂度低于精确对角化，需要确保迭代次数 $J<O(n^2)$，通常迭代次数设为 $J=O(n\log n)$。

3 仿真结果与分析

3.1 图信号去噪

将截断和并行截断雅可比算法与文献[8]、[9]、[11]的算法在图信号去噪上的性能进行对比，所有仿真均在相同环境下进行。用 GSPBOX[18] 构建了 Random sensor、Swiss roll、Community 三种图，图上信号由图拉普拉斯矩阵前 10%的特征向量求和组成，图 2 为节点数为 128 的 3 种图信号。实验中，图信号所添加的噪声是均值为 0、标准差为 σ 的加性高斯噪声，图滤波器组中的低通信道的阈值设为 0，高通信道的阈值设为 3σ。

表 1～3 为不同算法对含噪图信号去噪后的信噪比，去噪结果是 50 次随机实验结果的平均值。通过对比实验结果，可得如下结论：

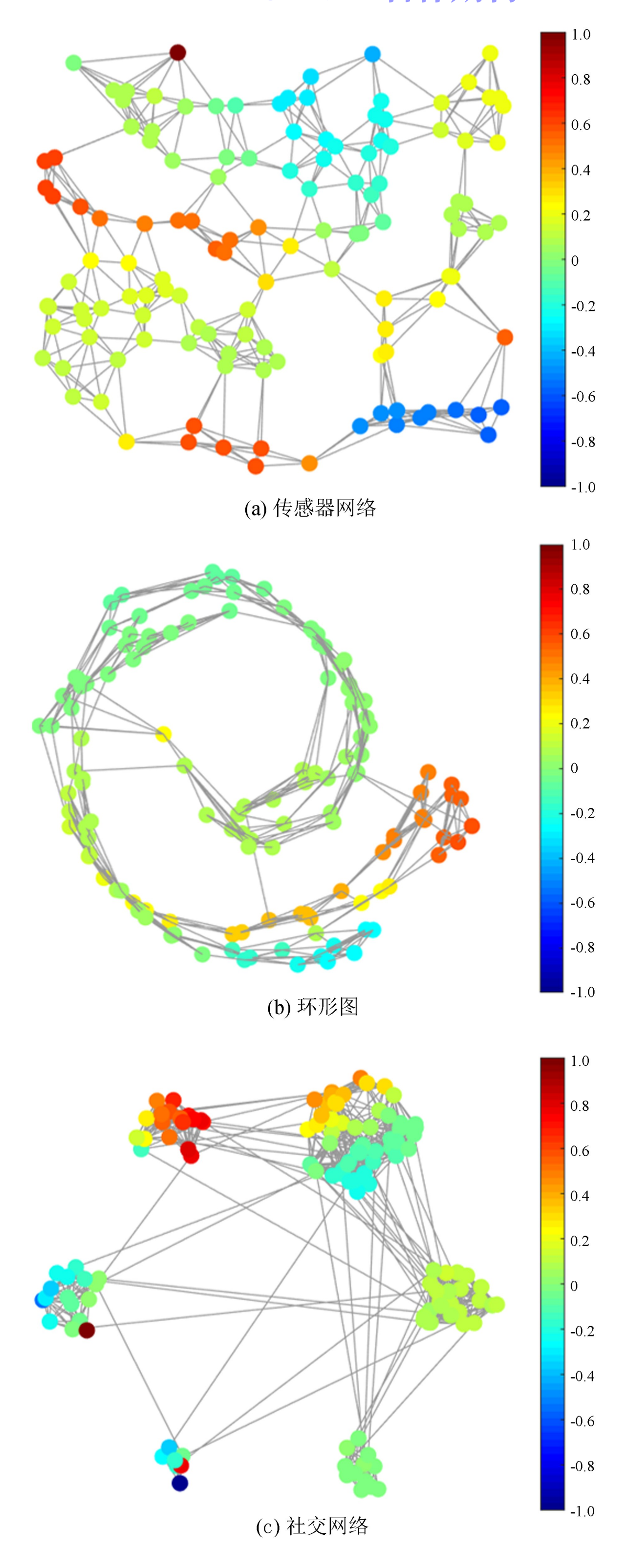


图 2 3 种不同拓扑结构的图信号

1）在 Givens 旋转次数相同的情况下，截断雅可比算法的去噪效果总体上优于并行截断雅可比算法。这是因为在每步迭代过程中，截断雅可比算法获得的解都是局部最优解，而并行截断雅可比算法获得的解并非局部最优解，这导致了并行截断雅可比算法的收

敛速度要慢于截断雅可比算法。

2)随着 Givens 旋转次数增加，截断雅可比算法与并行截断雅可比算法的去噪效果更接近于文献[11]，原因在于，随着迭代次数的增加，2 种算法求得的近似特征矩阵不断趋近于精准的特征矩阵。

3)在迭代次数较低时，截断和并行截断雅可比算法取得的去噪效果要优于文献[8-9]。在顶点域采样图滤波器组中，图信号与噪声信号未得到有效分离，2 种信号混杂程度较高，从采样图信号中难以有效滤除噪声信号。而对于频域采样图滤波器组而言，由于噪声信息大多分布在高频部分，图信号与噪声信号从频域角度得到了有效分离。因此，频域采样图滤波器组[11]的去噪效果要优于顶点域采样图滤波器组[8-9]，而改进雅可比算法是对文献[11]的一种近似，其去噪效果本质上仍优于文献[8-9]。

表 1　sensor 图信号在不同算法下去噪后的信噪比　dB

方法	节点数为 128			节点数为 256			节点数为 512		
	$\sigma=1/16$	$\sigma=1/8$	$\sigma=1/4$	$\sigma=1/16$	$\sigma=1/8$	$\sigma=1/4$	$\sigma=1/16$	$\sigma=1/8$	$\sigma=1/4$
含噪信号	14.07	8.29	2.07	14.14	8.21	2.14	14.07	8.05	2.07
文献[8]	12.31	8.12	4.62	12.85	8.68	5.13	12.90	8.71	5.17
文献[9]	12.59	7.43	3.22	12.36	8.08	3.86	12.56	7.55	3.20
文献[11]	19.89	14.13	7.99	19.80	13.90	7.89	19.77	13.70	7.79
截断($n\log n$)	19.04	13.83	7.97	18.98	13.64	7.78	18.80	13.42	7.69
并行($n\log n$)	17.88	13.42	7.84	18.35	13.42	7.69	17.94	13.14	7.64
截断($2n\log n$)	19.80	14.06	8.00	19.56	13.83	7.82	19.57	13.63	7.73
并行($2n\log n$)	19.43	14.02	8.02	19.45	13.78	7.81	19.16	13.53	7.72

表 2　roll 图信号在不同算法下去噪后的信噪比　dB

方法	节点数为 128			节点数为 256			节点数为 512		
	$\sigma=1/16$	$\sigma=1/8$	$\sigma=1/4$	$\sigma=1/16$	$\sigma=1/8$	$\sigma=1/4$	$\sigma=1/16$	$\sigma=1/8$	$\sigma=1/4$
含噪信号	14.33	8.17	2.26	14.22	8.17	2.05	14.03	8.07	2.07
文献[8]	13.16	8.63	5.13	12.46	8.52	5.26	12.66	8.56	5.02
文献[9]	12.00	7.42	3.28	12.64	7.26	3.27	12.07	7.68	3.25
文献[11]	20.15	14.08	8.24	20.01	14.00	7.75	19.66	13.67	7.79
截断($n\log n$)	19.14	13.83	8.10	19.19	13.75	7.65	18.93	13.49	7.72
并行($n\log n$)	18.71	13.69	8.07	17.63	12.98	7.46	17.51	12.98	7.61
截断($2n\log n$)	19.93	13.97	8.20	19.81	13.92	7.71	19.43	13.47	7.75
并行($2n\log n$)	19.70	14.03	8.21	19.48	13.84	7.72	19.00	13.60	7.73

表 3　community 图信号在不同算法下去噪后的信噪比　dB

方法	节点数为 128			节点数为 256			节点数为 512		
	1/16	1/8	1/4	1/16	1/8	1/4	1/16	1/8	1/4
含噪信号	14.31	8.07	2.08	14.20	8.10	2.20	14.05	8.06	2.06
文献[8]	13.50	8.13	3.13	13.13	7.60	2.58	12.29	7.33	2.61
文献[9]	13.86	8.94	3.76	12.94	7.66	2.76	13.29	8.10	3.04
文献[11]	19.96	13.82	8.02	19.84	13.88	8.01	19.65	13.77	7.78
截断($n\log n$)	17.26	13.02	7.82	16.46	12.73	7.63	16.24	12.52	7.49
并行($n\log n$)	14.62	10.72	6.91	13.13	10.24	6.62	13.07	9.98	6.37
截断($2n\log n$)	18.83	13.54	7.98	18.16	13.37	7.82	17.93	13.20	7.63
并行($2n\log n$)	16.28	12.44	7.59	15.98	12.33	7.52	15.45	12.10	7.26

3.2 图像去噪

在相同噪声环境下对比不同算法对图像的去噪性能。图像可建模为一张图，文献[19]给出了图像的 8 邻域图表示，其像素对应于图节点，像素值则对应于图信号，每个像素与其上下左右 4 个像素及 2 条对角线上的 4 个像素相连接，其边的权重值由相邻节点的像素值决定[20]，如图 3 所示。

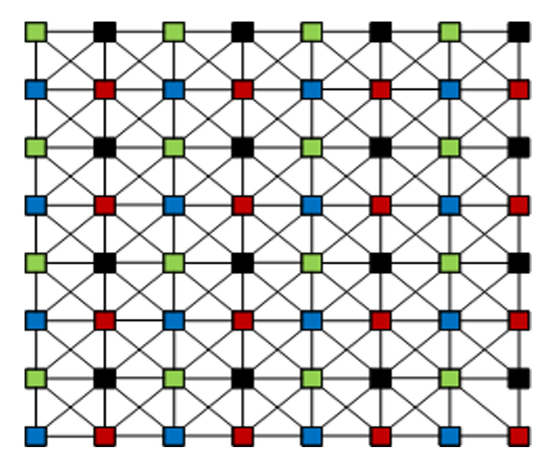


图 3 图像的 8 邻域图表示

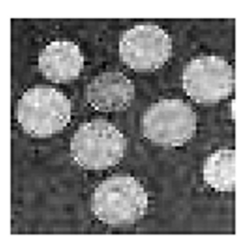
实验选用了如图 4(a)所示的硬币图像，并以峰值信噪比(PSNR)和结构相似性(SSIM)作为图像去噪的性能评价指标。图 4 为不同算法去噪前后的图像，表 4、5 分别为图像去噪前后的峰值信噪比和结构相似性。从图 4 和表 4、5 可看出，与文献[8-9]相比，改进雅可比算法的去噪效果更好；与文献[11]相比，去噪效果稍差，但随着 Givens 旋转次数的不断增加，改进雅可比算法的去噪效果不断趋近于文献[11]的去噪效果。另外，在低噪声水平下，部分图滤波器组未发挥作用，表现在去噪后信号信噪比低于含噪前，原因在于图滤波器组滤掉的高频部分不仅含有噪声信息，还含有图像的边缘信息，去噪过程中原本的图像信息遭到破坏，而真正的噪声信息未得到有效处理。



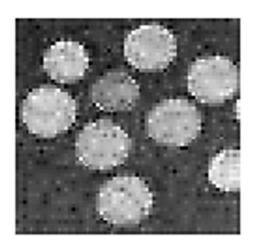
(a) 原始图



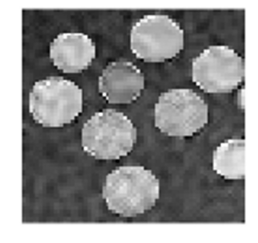
(b) 噪声图(σ=20)



(c) 文献[8]



(d) 文献[9]



(e) 文献[11]



(f) 截断($5n\log n$)



(g) 并行($5n\log n$)

图 4 硬币图像在不同算法下去噪前后的图像

表 4 图像在不同算法下去噪前后的 PSNR dB

方法	σ=10	σ=15	σ=20	σ=25	σ=30
含噪图像	28.13	24.61	22.12	20.18	18.60
文献[8]	26.73	24.02	22.42	21.35	20.54
文献[9]	26.76	23.88	22.14	20.97	20.13
文献[11]	28.31	26.55	25.22	24.01	22.96
截断($n\log n$)	26.75	24.44	23.03	21.96	21.13
并行($n\log n$)	26.13	23.67	22.12	21.04	20.24
截断($2n\log n$)	27.30	25.26	23.94	22.89	21.99
并行($2n\log n$)	26.72	24.52	23.13	22.12	21.31

表 5 图像在不同算法下去噪前后的 SSIM

方法	σ=10	σ=15	σ=20	σ=25	σ=30
含噪图像	0.985 4	0.967 7	0.944 4	0.916 3	0.885 9
文献[8]	0.979 5	0.961 7	0.944 8	0.929 8	0.916 6
文献[9]	0.979 7	0.960 7	0.941 6	0.924 1	0.909 9
文献[11]	0.985 7	0.978 7	0.971 3	0.962 3	0.952 8
截断($n\log n$)	0.979 9	0.966 1	0.953 7	0.941 2	0.930 0
并行($n\log n$)	0.977 1	0.960 2	0.944 3	0.928 9	0.916 1
截断($2n\log n$)	0.982 2	0.971 7	0.961 9	0.952 0	0.941 8
并行($2n\log n$)	0.979 8	0.966 7	0.954 6	0.943 1	0.932 6

4 结束语

拉普拉斯矩阵的特征分解是频域临界采样图滤波器组中计算复杂度最高的运算，当图的规模很大时，计算代价过大。针对该问题，使用 2 种改进的雅可比算法近似求解频域临界采样图滤波器组中的特征矩阵，从而在保证完全重构的前提下达到降低计算复杂度的目的。仿真实验结果表明，在迭代次数较低时，截断和并行截断雅可比算法的去噪性能要优于顶点域采样图滤波器组，且接近于传统频域临界采样图滤波器组。

参考文献：

[1] MICHELLE GRIVAN, NEWMAN M E. Community structure in social and biological networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2002, 99(12): 7812-7826.

[2] SANKARASUBRAMANIAMY Y, AKYILDIZ I F, SU W L, et al. A survey on sensor networks[J]. IEEE Communications Magazine, 2002, 40(8): 102-114.

[3] STAM C J, RRIJNEVELD J C. Graph theoretical analysis of complex networks in the brain[J]. Nonlinear Biomedical Physics, 2007, 1(3): 1-19.

[4] SHUMAN D I, NARANG S K, FROSSARD P, et al. The emerging field of signal processing on graphs: extending highdimensional data analysis to networks and other irregular domains[J]. IEEE Signal Process Magazine, 2013, 30(3): 83-98.

[5] SHUMAN D I, FARAJI M J, VANDERGHEYNST P. A multiscale pyramid transform for graph signals[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2016, 64(8): 2119-2134.

[6] TEKE O, VAIDYANATHAN P P. Extending classical multirate signal processing theory to graphs, part I: fundamentals[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2017, 65(2): 409-422.

[7] TEKE O, VAIDYANATHAN P P. Extending classical multirate signal processing theory to graphs, part II: m-channel filter banks[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2017, 65(2): 423-437.

[8] NARANG S K, ORTEGA A. Perfect reconstruction two-channel wavelet filter banks for graph structured data[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2012, 60(6): 2786-2799.

[9] NARANG S K, ORTEGA A. Compact support biorthogonal wavelet filterbanks for arbitrary undirected graphs[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2013, 61(19): 4673-4685.

[10] EKAMBARAM V N, FANTI G C, AYAZIFAR B, et al. Spline-like wavelet filterbanks for multiresolution analysis of graph-structured data[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2015, 1(4): 258-278.

[11] SAKIYAMA A, WATANABE K, TANAKA Y, et al. Two-channel critically-sampled graph filterbanks with spectral domain sampling[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2019, 67(6): 1447-1460.

[12] TANAKA Y. Spectral domain sampling of graph signals[J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 2018, 66(14): 3752-3767.

[13] COHENO A, DAUBECHIES I, FEAUVEAU J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(5): 485-560.

[14] MAGOAROU L L, GRIBONVAL R, TREMBLAY N. Approximate fast graph Fourier transforms via multilayer sparse approximations[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2017, 4(2): 407-420.

[15] JACOBI C G J. Uber ein leichtes verfahren, die in der theorie der sakularst orungen vorkommenden gleichungen numerisch aufzulosen[J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1846, 1846(30): 51-94.

[16] GIVENS W. Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1958, 6(1): 26-50.

[17] GOLUB G H, VANLOAN C G. Matrix Computations[M]. Washington D. C: Jonhns Hopkins University Press, 2012.

[18] PRAUDIN N, PARATTE J, SHUMAN D, et al. Gsp box: a toolbox for signal processing on graphs[EB/OL]. https://arxiv.org/pdf/1408.5781v1.pdf. 2014.

[19] NARANG S K, CHAO Y H, ORTEGA A. Graph-wavelet filterbanks for edge-aware image processing[C]//2012 IEEE Statistical Signal Processing Workshop. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2012: 141-144.

[20] SHEKKIZHAR S, ORTEGA A. Efficient graph construction for image representation[EB/OL]. https://arxiv.org/pdf/2002.06662.pdf. 2020.

编辑：张所滨